DM n°1 : Corrigé

Exercice 1. 1) On a

$$\begin{aligned}\text{non}(\text{non}P \text{ et } Q) &\iff \text{non}\,(Q \text{ et } \text{non}P)\\ &\iff \text{non}\,(\text{non}(Q \implies P))\\ &\iff \boxed{Q \implies P}\end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned}\text{non}\,(P \implies (Q \implies \text{non}P)) &\iff P \text{ et } \text{non}(Q \implies \text{non}P)\\ &\iff P \text{ et } (Q \text{ et } \text{non}(\text{non}P))\\ &\iff P \text{ et } Q \text{ et } P\\ &\iff \boxed{P \text{ et } Q}\end{aligned}$$

3) $a=b=c$ équivaut à “$a=b$ et $b=c$”. Ainsi :

$$\begin{aligned}\text{non}(a=b=c) &\iff \text{non}(a=b \text{ et } b=c)\\ &\iff \text{non}(a=b) \text{ ou } \text{non}(b=c)\\ &\iff \boxed{a\neq b \text{ ou } b\neq c}\end{aligned}$$

(note : rajouter “ ou $c \neq a$” est inutile, faites des tests pour vous en convaincre !)

Exercice 2. 1) Montrons P. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors

  $$n^3 - n = (2k)^3 - 2k = 8k^3 - 2k = 2\left(4k^3 - k\right)$$

  Ainsi, (comme $4k^3 - k$ est entier), $n^3 - n$ est pair.
- Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors

  $$\begin{aligned}n^3 - n &= (2k+1)^3 - (2k+1)\\ &= 8k^3 + 6k^2 + 6k + 1 - 2k - 1\\ &= 2\left(4k^3 + 3k^2 + 2k\right)\end{aligned}$$

  D’où $n^3 - n$ est pair.

En conclusion, P est vraie.

Autre méthode possible (non rédigée correctement) : $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ et quelle que soit la valeur de n, ou bien n est pair, ou bien $n+1$ est pair. Ainsi, $n^3 - n$ est pair.

2) Montrons Q. **On pose** $\eta = 1 > 0$. **Soit** $x \in \mathbb{R}$. **On suppose** $|x| \leq 1$. (Montrons que $x^2 \leq 1$)

$$\begin{aligned}|x| \leq 1 &\implies |x|^2 \leq 1^2 && \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+\\ &\implies x^2 \leq 1 && \left(\text{car } |x|^2 = |x^2| = x^2\right)\end{aligned}$$

Par voie de conséquence, Q est vraie.

3) Montrons R. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par contraposée, il suffit de montrer que : n est impair $\implies$ n^2-1 est divisible par 8. Supposons n impair. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k+1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \\ &= 4k(k+1) \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $k(k+1)$ est pair. Or, quelle que soit la valeur de l'entier k, ou bien k est pair, ou bien $k+1$ est pair. Dans les deux cas, $k(k+1)$ est pair. D'où le résultat.

Exercice 3. On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction solution. En particulier, (en posant $x = y = 0$), on a

$$f(0+0) = f(0) - f(0)$$

donc $f(0) = 0$. Ensuite, (en posant $x = 0$) pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(0+y) = f(0) - f(y)$$

donc $f(y) = -f(y)$. On en déduit que $2f(y) = 0$, donc $f(y) = 0$. On en déduit que f est la fonction nulle.

- Synthèse : vérifions si $f : x \mapsto 0$ est solution. Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$f(x+y) = 0 = 0 - 0 = f(x) - f(y)$$

donc f est bien solution.

Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \{x \mapsto 0\}}$

Exercice 4 ( ). Corrigé en classe.